

33T MATH
(BENGALI)

2023

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions.*

Q. No. 1 (i-x) carries 1 mark each

$$1 \times 10 = 10$$

Q. Nos. 2-13 carry 4 marks each

$$4 \times 12 = 48$$

Q. Nos. 14-20 carry 6 marks each

$$6 \times 7 = 42$$

$$\text{Total} = 100$$

Contd.

1. Answer the following questions :

1×10=10

নিম্নোক্ত প্রশ্নগুলির উত্তর লেখো :

(i) State true **or** false :

শুদ্ধ না অশুদ্ধ লেখো :

On any finite set X , an one-one function $f: X \rightarrow X$ is necessarily onto.

যে-কোনো সসীম সংহতি X -এর জন্য একটি এককী ফলন $f: X \rightarrow X$ সর্বদা আচ্ছাদক।

(ii) If (যদি) $\cos^{-1} x = y$, then the value of y is (তাহলে y -এর মান হলো)

(a) $0 \leq y \leq \pi$

(b) $0 < y < \pi$

(c) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

(d) $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

(iii) Fill in the blanks :

শূন্যস্থান পূর্ণ করো :

The number of all possible matrices of order 2×2 with each entry 0 or 1 is _____.

মৌলগুলি 0 বা 1-এ গঠন করতে পারা 2×2 ঘাতের সম্ভবপর মৌলকক্ষেত্র সংখ্যা হলো _____।

(iv) What do you mean by critical point of a function?

একটি ফলনের ক্রান্তিক বিন্দু বলতে কি বোঝো?

(v) Give an example of a function which is continuous on \mathbb{R} but not differentiable therein.একটি ফলনের উদাহরণ দাও যেটি \mathbb{R} -এ অবিচ্ছিন্ন হয়, কিন্তু সেখানে অবকলনীয় হয় না।(vi) If $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ such that $f(1) = 0$, then find $f(x)$.যদি $\frac{d}{dx} f(x) = 4x^3 - \frac{3}{x^4}$ যেখানে $f(1) = 0$ হয়, তাহলে $f(x)$ বের করো।

(vii) Write the order and degree (if exist) of the differential equation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{\cos \frac{dy}{dx}}$$

 $\frac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt{\cos \frac{dy}{dx}}$ অবকল সমীকরণটির ক্রম এবং মাত্রা (যদি আছে) লেখো।(viii) If \vec{a} is a non-zero vector of magnitude ' a ' and λ is a non-zero scalar, then $2\lambda\vec{a}$ is unit vector ifযদি \vec{a} এটি অশূন্য ভেক্টর এবং এর মান ' a ' এবং λ একটি অশূন্য স্কেলার। তাহলে $2\lambda\vec{a}$ একটি একক ভেক্টর হয় যদি

(i) $\lambda = 1$

(ii) $\lambda = -1$

(iii) $a = |\lambda|$

(iv) $a = \frac{1}{2|\lambda|}$

(ix) Find the Cartesian equation of the plane

$$\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$$

where \vec{r} be the position vector of any arbitrary point. $\vec{r} \cdot (\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) = 2$ সমতলটির কার্টেসীয় সমীকরণ বের করো যেখানে \vec{r} হলো যে-কোনো একটি যাদৃচ্ছিক বিন্দুর স্থিতি ভেক্টর।

(x) Define Bernoulli trials.

বার্ণুলি প্রচেষ্টার সংজ্ঞা দাও।

2. Show that $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ given by $f(x) = \frac{x}{x+3}$ is one-one. Find the inverse of the function $f: [-1, 1] \rightarrow \text{Range } f$. 2+2=4

$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ফলনটির সংজ্ঞা এভাবে দেওয়া আছে $f(x) = \frac{x}{x+3}$ । দেখাও যে ফলনটি একৈকী। $f: [-1, 1] \rightarrow \text{Range } f$ (f -এর পরিসর) ফলনটির প্রতিলোম বের করো।

OR/ অথবা

Let L be the set of all lines in xy -plane and R be the relation in L defined as $R = \{(l_1, l_2) / l_1 \text{ is parallel to } l_2\}$. Show that R is an equivalence relation. Find the set of all lines related to the line $y = 3x + 1$. 3+1=4

ধরা হলো xy সমতলে থাকা সকল রেখার সংহতিটি L । দেখাও যে L -এ সংজ্ঞাবদ্ধ সম্বন্ধ $R = \{(l_1, l_2) / l_1, l_2 \text{ এর সমান্তরাল}\}$ একটি সমতুল্যতা সম্বন্ধ। $y = 3x + 1$ রেখার সঙ্গে যুক্ত সকল রেখার সংহতিটি বের করো।

3. Prove that $2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ for $x \in [-1, 1]$. Also find the value of $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$. 2+2=4

প্রমাণ করো যে, $x \in [-1, 1]$ এর জন্য $2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$ ।

এর সঙ্গে $\sin \left(\frac{\pi}{3} - \sin^{-1} \left(-\frac{1}{2} \right) \right)$ এর মান নির্ণয় করো।

OR/ অথবা

Show that (দেখাও যে)

4

$$\sin^{-1} \left(\frac{12}{13} \right) + \cos^{-1} \left(\frac{4}{5} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{63}{16} \right) = \pi$$

4. Using properties of determinants, show that
নির্ণায়কের ধর্ম প্রয়োগ করে দেখাও যে

4

$$\begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ba & -b^2 & bc \\ ca & cb & -c^2 \end{vmatrix} = 4a^2 b^2 c^2$$

OR/ অথবা

For any square matrix A with real entries, prove that $A + A'$ is symmetric and $A - A'$ is skew symmetric matrix (where A' is the transpose of A). 2+2=4

প্রমাণ করো যে বাস্তব মৌলবিশিষ্ট একটি বর্গ মৌলকক্ষ A -এর ক্ষেত্রে $A + A'$ সমমিত এবং $A - A'$ বিষম সমমিত (যেখানে A' হলো A -এর পঙ্কান্তরিত মৌলকক্ষ)।

5. Find $\frac{dy}{dx}$ if

2+2=4

$\frac{dy}{dx}$ বের করো যদি

(i) $\log(\log x)$, $x > 1$

(ii) $y = \sin^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$, $0 < x < 1$

OR/ অথবা

If $y^x = x^y$, find $\frac{dy}{dx}$

4

যদি $y^x = x^y$ হয়, $\frac{dy}{dx}$ বের করো।

6. Evaluate : **(any two)**
মান নির্ণয় করো : (যেকোনো দুটি)

2+2=4

(i) $\int \frac{dx}{x + x \log x}$

(ii) $\int \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} dx$

(iii) $\int e^x \sin x dx$

7. Integrate : **(any one)**
অনুকূল বের করো : (যেকোনো একটি)

1×4=4

(i) $\int \frac{2x}{x^2 + 3x + 2}$

(ii) $\int_0^{2/3} \frac{dx}{4 + 9x^2}$

8. For the differential equation $xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$, find the solution curve passing through the point $(1, -1)$.

4

$xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2)$ অবকল সমীকরণের জন্য $(1, -1)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে অতিক্রম করা সমাধান বক্রটি নির্ণয় করো।

OR/ অথবা

Find a particular solution of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \quad (x \neq 0)$$

where $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

4

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x \quad (x \neq 0)$ অবকল সমীকরণটির বিশেষ সমাধান বের করো যেখানে $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

9. Answer (i) and (ii) **OR** (a) and (b) :

উত্তর লেখো (i) এবং (ii) অথবা (a) এবং (b) :

2+2=4

(i) If (যদি) $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

show that (দেখাও যে) $F(x)F(y) = F(x+y)$

- (ii) Prove that (প্রমাণ করো যে)

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(2a-x) dx$$

OR/ অথবা

2+2=4

(a) If $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$, then find x .

যদি $\begin{vmatrix} x & 2 \\ 18 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 18 & 6 \end{vmatrix}$ হয়, তাহলে x -এর মান বের করো।

(b) If $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$

find $\frac{dy}{dx}$.

যদি $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ হয়, $\frac{dy}{dx}$ বের করো।

10. Show that the points A , B and C with position vectors $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ and $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ respectively form the vertices of a right angled triangle. 1×4=4

A , B এবং C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর ক্রমে $\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$ । দেখাও যে বিন্দু তিনটি একটি সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করে।

11. 3+1=4

(i) Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - \vec{b}$, where $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

$\vec{a} + \vec{b}$ এবং $\vec{a} - \vec{b}$ ভেক্টর দুটির প্রত্যেকটির সঙ্গে লম্ব হওয়া একটি একক ভেক্টর বের করো যেখানে $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ।

(ii) Evaluate the product :

পূরণফলটি বের করো :

$$(3\vec{a} - 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 7\vec{b})$$

OR / অথবা

Show that the points $A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ and $C(11, 3, 7)$ are collinear and find the ratio in which B divides AC . 4

দেখাও যে $A(1, -2, -8)$, $B(5, 0, -2)$ এবং $C(11, 3, 7)$ বিন্দুগুলি একরেখীয় এবং B বিন্দু AC কে কি অনুপাতে ভাগ করে বের করো।

12. A bag consists of 10 balls each marked with one of the digits from 0 to 9. If 4 balls are drawn successively with replacement from the bag, what is the probability that one ball is marked with the digit 1. 4

একটি থলিতে 0 থেকে 9 সংখ্যা দিয়ে চিহ্নিত 10টি বল আছে। থলি থেকে একটির পর একটি মোট 4টি বল পুনঃস্থাপন করার জন্য বের করা হলো। একটি বল 1 সংখ্যায় চিহ্নিত হওয়ার সম্ভাবিতা কত?

13. Find all points of discontinuity of f where f is defined by

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 4, & \text{if } x \leq -4 \\ -2x, & \text{if } -4 < x < 4 \\ 6x + 2 & \text{if } x \geq 4 \end{cases} \quad 4$$

f -এর বিচ্ছিন্নতার সকল বিন্দু বের করো যেখানে f ফলনটি এভাবে সংজ্ঞাবদ্ধ আছে

$$f(x) = \begin{cases} |x| + 4, & \text{যদি } x \leq -4 \\ -2x, & \text{যদি } -4 < x < 4 \\ 6x + 2 & \text{যদি } x \geq 4 \end{cases}$$

14. Using elementary operation, find the inverse of the matrix A

$$\text{where } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad 6$$

$$\text{মৌলিক প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে } A\text{-এর প্রতিলোম মৌলিককর বের করো যেখানে } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

OR / অথবা

Solve the following system of linear equations using matrix method : 6

মৌলিককরীয় পদ্ধতি দ্বারা নীচের সমীকরণ প্রণালীর সমাধান নির্ণয় করো :

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 3z &= 5 \\ x - 2y + z &= -4 \\ 3x - y - 2z &= 3 \end{aligned}$$

15. 2+4=6

(i) The radius of a circle is increasing at the rate 0.5 cm/s . What is the rate of increase of its circumference?

একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ সেকেন্ডে 0.5 cm হারে বাড়ে। এর পরিধির বৃদ্ধির হার কত?

- (ii) Find the interval in which the function y is strictly increasing and decreasing where $y = x^2 e^{-x}$.
 $y = x^2 e^{-x}$ ফলনটি অন্তরালে সতত y বর্ধিতমান এবং হ্রাসমান নির্ণয় করো।

OR/ অথবা

3+3=6

- (a) Find the points on the curve $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ at which the tangents are parallel to the X -axis.

$x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$ বক্রের যে বিন্দুতে স্পর্শক X -অক্ষের সমান্তরাল, সেই বিন্দু বের করো।

- (b) Find all the points of local maxima and local minima of the function f given by

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5 \text{ (if exist).}$$

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 5$ -এর দ্বারা নির্দিষ্ট f ফলনের স্থানীয় গরিষ্ঠ মান এবং স্থানীয় লঘিষ্ঠ মানের সকল বিন্দু বের করো (যদি আছে)।

16.

3+3=6

- (a) Evaluate :

মান নির্ণয় করো :

$$\int_{-5}^5 |x+2| dx$$

- (b) Prove that

প্রমাণ করো যে

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \frac{2}{3}$$

OR/ অথবা

Find the area of the region bounded by the curves $y = x^2 + 2$, $y = x$, $x = 0$ and $x = 3$. 6

$y = x^2 + 2$ বক্র $y = x$, $x = 0$ এবং $x = 3$ রেখা দিয়ে ঘেরা ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করো।

17.

2+4=6

- (a) Form a differential equation representing the given family of curves $y = e^x(a \cos x + b \sin x)$ by eliminating arbitrary constants a and b .

প্রদত্ত বক্র পরিবার $y = e^x(a \cos x + b \sin x)$ -এর যাদৃচ্ছিক ধ্রুবক a এবং b অপনয়ন করে অবকল সমীকরণটি গঠন করো।

- (b) Find the general solution of the differential equation

$$x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x.$$

$x \log x \frac{dy}{dx} + y = \frac{2}{x} \log x$ অবকল সমীকরণটির সাধারণ সমাধান বের করো।

OR/ অথবা

Show that the differential equation $2y e^{x/y} dx + \left(y - 2x e^{x/y} \right) dy = 0$ is homogeneous and find its particular solution when $y(0) = 1$. 6

দেখাও যে $2y e^{x/y} dx + \left(y - 2x e^{x/y} \right) dy = 0$ -এর অবকল সমীকরণটি সমমাত্রিক এবং এর বিশেষ সমাধান বের করো যখন $y(0) = 1$.

18. Find the vector equation of the plane passing through the intersection of the planes

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$$

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$$

and through the point $(2, 1, 3)$.

6

$(2, 1, 3)$ বিন্দুর মধ্য দিয়ে যেতে পারা এবং $\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 7$,

$\vec{r} \cdot (2\hat{i} + 5\hat{j} + 3\hat{k}) = 9$ সমতল দুটি কাটাকাটি করা রেখার মধ্য দিয়ে যাওয়া সমতলের ভেক্টর সমীকরণ বের করো।

OR / অথবা

4+2=6

- (i) Find the vector and Cartesian equations of the line that passes through the points $(3, -2, -5)$ and $(3, -2, 6)$.

$(3, -2, -5)$ এবং $(3, -2, 6)$ বিন্দু সংযোগী রেখাটির ভেক্টর এবং কার্টেসীয় সমীকরণ বের করো।

- (ii) Show that the lines $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ and $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ are perpendicular to each other.

দেখাও যে $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$ এবং $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$ রেখা দুটি পরস্পর লম্ব হয়।

19. Solve graphically the following linear programming problem. 6

চিত্রাঙ্কিত নিয়মে নিম্নোক্ত রৈখিক প্রগ্রেমিং সমস্যাটির সমাধান করো :

Maximize and minimize

$$Z = -x + 2y$$

subject to the constraints

$$x \geq 2$$

$$x + y \geq 5$$

$$x + 2y \geq 6$$

$$y \geq 0$$

$Z = -x + 2y$ -এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান বের করো যেখানে

$$x \geq 2$$

$$x + y \geq 5$$

$$x + 2y \geq 6$$

$$y \geq 0$$

OR / অথবা

A manufacturer makes two types of toys A and B. Three machines are needed for this purpose and the time (in minutes) required for each toy of the machines is given below :

Types of Toys	Machines		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

Each machine is available for a maximum of 6 hours per day. If the profit on each toy of type A is Rs. 7.50 and that on each toy of type B is Rs. 5, show that 15 toys of type A and 30 toys of type B should be manufactured in a day to get maximum profit. 6

একজন প্রস্তুতকর্তা A এবং B দুই ধরনের খেলনা তৈরী করে। এর জন্য তিন ধরনের মেশিনের আবশ্যক হয়। এবং মেশিনটিতে প্রতিটি খেলনার জন্য প্রয়োজনীয় সময় (মিনিটের হিসাবে) নিম্নোক্ত ধরনের —

খেলনার প্রকার	মেশিন		
	I	II	III
A	12	18	6
B	6	0	9

দৈনিক সর্বোচ্চ 6 ঘণ্টার জন্য প্রতিটি মেশিন উপলব্ধ হয়। যদি A প্রকারের প্রতিটি খেলনা 7.50 টাকা এবং B প্রকারের প্রতিটি খেলনায় 5 টাকা করে লাভ হয়। দেখাও যে সর্বোচ্চ লাভ অর্জন করার জন্য দৈনিক A প্রকারের 15টি এবং B প্রকারের 30টি করে খেলনা তৈরী করতে হবে।

20. A doctor is to visit a patient. From the past experience, it is known that the probabilities that he will come by train, bus, scooter or by

other means of transport are respectively $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ and $\frac{2}{5}$. The

probabilities that he will be late are $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{12}$ if he comes by train, bus and scooter respectively, but if he comes by other means of transport, then he will not be late. When he arrives, he is late. What is the probability that he comes by bus? 6

একজন চিকিৎসকের একজন রোগীকে দেখতে যেতে হবে। পূর্বের অভিজ্ঞতা থেকে এটি জানা

যায় যে তিনি ট্রেন, বাস, স্কুটার বা অন্য ব্যবস্থায় যাওয়ার সম্ভাবিতাগুলি ক্রমে $\frac{3}{10}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$

এবং $\frac{2}{5}$ । ট্রেন, বাস বা স্কুটারে গেলে তাঁর দেরী হওয়ার সম্ভাবিতাগুলি ক্রমে $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ এবং $\frac{1}{12}$ ।

কিন্তু তিনি যদি অন্য ব্যবস্থায় যান, তাহলে তাঁর দেরী হবে না। তাঁর পৌঁছাতে দেরী হলো। তাঁর বাসে যাওয়ার সম্ভাবিতা কত?

OR/ অথবা

(i)

2+2=4

In a girls' hostel, 70% of the students read Hindi newspaper, 30% read English newspaper and 20% read both Hindi and English newspapers. A student is selected at random.

(a) Find the probability that she reads neither Hindi nor English newspapers.

(b) If she reads Hindi newspaper, find the probability that she reads English newspaper.

একটি ছাত্রীনিবাসে ছাত্রীদের 70% জন হিন্দী, 30% জন ইংরাজী এবং 20% জন হিন্দী এবং ইংরাজী উভয় প্রকারের সংবাদপত্র পড়ে। যাদৃচ্ছিকভাবে একজন ছাত্রী বাছাই করা হলো —

(a) সম্ভাবিতা বের করো যাতে ছাত্রীটি হিন্দী বা ইংরাজী কোনো ধরনের সংবাদপত্র পড়ে না।

(b) যদি সে হিন্দী সংবাদপত্র পড়ে, তাহলে ইংরাজী সংবাদপত্র পড়ার সম্ভাবিতা নির্ণয় করো।

(ii)

Define independent events with an example.

2

একটি উদাহরণসহ স্বতন্ত্র ঘটনার সংজ্ঞা লেখো।

_____ × _____