**32T MATH**
**(BENGALI)**

# 2022

# MATHEMATICS

**Full Marks : 100**

**Pass Marks : 30**

**Time : Three hours**

***The figures in the margin indicate full marks for the questions.***

| | |
|---|---|
| *Q. No. 1 (a–j) carries 1 mark each* | 1×10 = 10 |
| *Q. Nos. 2–13 carry 4 marks each* | 4×12 = 48 |
| *Q. Nos. 14–20 carry 6 marks each* | 6×7 = 42 |
| | Total = 100 |

1. Answer the following questions : 1×10=10

নিম্নলিখিত প্রশ্নগুলির উত্তর দাও ঃ

*(a)* Give an example of a column matrix which is also a row matrix.

একটি স্তম্ভ মৌলকক্ষের উদাহরণ দাও যেটি সারি মৌলকক্ষও হয়।

*(b)* "Diagonal elements of a skew-symmetric matrix are always zero" — Why ?

"বিপ্রতিসাম্য মৌলকক্ষের তির্যক মৌলগুলি সর্বদা শূন্য" — কেন?

*(c)* Let $f(x)=[x]$, where $[x]$ is a greatest integer function and $g(x)=x$. Find the value of $(f\circ g)(-\frac{1}{3})$.

ধরা হলো $f(x)=[x]$, যেখানে $[x]$ হলো গরিষ্ঠ অখণ্ড ফলন এবং $g(x)=x$. $(f\circ g)(-\frac{1}{3})$ - এর মান নির্ণয় করো।

*(d)* Differentiate $\sin x$ with respect to $e^x$.

$e^x$ - এর সাপেক্ষে $\sin x$ - এর অবকলজ নির্ণয় করো।

*(e)* Write down the value of $\int_{-2}^{2}|x|\,dx$.

$\int_{-2}^{2}|x|\,dx$ - এর মান লেখো।



*(f)* Find the order of the differential equation

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^5+\sin(y'')=0.$$

$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^5+\sin(y'')=0$ অবকল সমীকরণটির ক্রম নির্ণয় করো।

*(g)* Find the principal value of $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$-এর মুখ্য মান নির্ণয় করো।

*(h)* Fill in the blank :

শূন্যস্থান পূর্ণ করো ঃ

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\underline{\qquad\qquad}.$$

*(i)* What is the direction cosine of $X$-axis ?

$X$- অক্ষের দিশাঙ্ক কত?

*(j)* Let $A$ and $B$ be any two given sets. If $f:A\to B$ is a onto function, then find the range of $f$.

ধরা হলো $A$ এবং $B$ যে কোনো দুটি সংহতি। যদি $f:A\to B$ একটি আচ্ছাদক ফলন হয়, তাহলে $f$- এর পরিসর নির্ণয় করো।

2. Define an equivalence relation. Check whether the following relation $R$ defined on the set of integers $\mathbb{Z}$ is an equivalence relation or not, where $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ is an integer}\}$. 1+3=4

সমতুল্যতা সম্বন্ধের সংজ্ঞা দাও। $\mathbb{Z}$-এ সংজ্ঞাবদ্ধ নীচের সম্বন্ধ $R$-টি সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় না হয়না পরীক্ষা করো, যেখানে $R = \{(a, b) \mid a - b$ একটি অখণ্ড সংখ্যা।

***OR / অথবা***

Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = 2x - 3$ is invertible. Also find the inverse of $f$. 4

দেখাও যে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ -এ সংজ্ঞাবদ্ধ $f(x) = 2x - 3$ ফলনটি প্রতিলোমনীয়। $f$-এর প্রতিলোমও নির্ণয় করো।

3. Show that — 4
দেখাও যে —

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$$

***OR / অথবা***

Solve the following equation :

নীচের সমীকরণটি সমাধান করো ঃ

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$



4. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the value $\lambda$ and $\mu$ such that $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, where 0 is zero matrix of order 2. 4

যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে $\lambda$ এবং $\mu$-এর মান বের করো যাতে $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ হয়, যেখানে 0 হলো 2 ঘাতের শূন্য মৌলকক্ষ।

***OR / অথবা***

Determine the value of $a$ for which the system is consistent. 4

$a$-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য প্রণালীটি সুসংগত হয়।

$$x + y + z = 1$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$ax + ay + 2az = 4$$

2. Define an equivalence relation. Check whether the following relation $R$ defined on the set of integers $\mathbb{Z}$ is an equivalence relation or not, where $R = \{(a, b) \mid a - b \text{ is an integer}\}$. 1+3=4

সমতুল্যতা সম্বন্ধের সংজ্ঞা দাও। $\mathbb{Z}$-এ সংজ্ঞাবদ্ধ নীচের সম্বন্ধ $R$-টি সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় না হয়না পরীক্ষা করো, যেখানে $R = \{(a, b) \mid a - b$ একটি অখণ্ড সংখ্যা।

***OR / অথবা***

Show that the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined as $f(x) = 2x - 3$ is invertible. Also find the inverse of $f$. 4

দেখাও যে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ -এ সংজ্ঞাবদ্ধ $f(x) = 2x - 3$ ফলনটি প্রতিলোমনীয়। $f$-এর প্রতিলোমও নির্ণয় করো।

3. Show that — 4

দেখাও যে —

$$\sin^{-1}\frac{3}{5} - \sin^{-1}\frac{8}{17} = \cos^{-1}\frac{84}{85}$$

***OR / অথবা***

Solve the following equation :

নীচের সমীকরণটি সমাধান করো ঃ

$$2\tan^{-1}(\cos x) = \tan^{-1}(2\operatorname{cosec} x)$$



4. If $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ and $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the value $\lambda$ and $\mu$ such that $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$, where 0 is zero matrix of order 2. 4

যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ এবং $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে $\lambda$ এবং $\mu$-এর মান বের করো যাতে $A^2 + \lambda A + \mu I = 0$ হয়, যেখানে 0 হলো 2 ঘাতের শূন্য মৌলকক্ষ।

***OR / অথবা***

Determine the value of $a$ for which the system is consistent. 4

$a$-এর মান নির্ণয় করো যার জন্য প্রণালীটি সুসংগত হয়।

$$x + y + z = 1$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$ax + ay + 2az = 4$$

5. Find the value of $k$ so that the following function

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 100x}{99}, & \text{if } x\neq 0\\ k\ , & \text{if } x=0\end{cases}$$

is continuous at $x=0$. 4

যদি $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 100x}{99}, & \text{যদি } x\neq 0\\ k\ , & \text{যদি } x=0\end{cases}$

ফলনটি $x=0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন হয়, তাহলে $k$ - এর মান নির্ণয় করো।

6. Find $\dfrac{dy}{dx}$ if — 2+2=4

$\dfrac{dy}{dx}$ নির্ণয় করো যদি —

*(i)* $\sin^2 x+\cos^2 y=1$

*(ii)* $y=e^{\cos x}$ হয়।

7. Prove that the greatest integer function defined by

$f(x)=[x], 0<x<2$ is not differentiable at $x=1$. 4

প্রমাণ করো যে $f(x)=[x], 0<x<2$ - এর দ্বারা সংজ্ঞাবদ্ধ গরিষ্ঠ অখণ্ড ফলনটি $x=1$ বিন্দুতে অবকলনীয় নয়।



***OR / অথবা***

If (যদি) $e^y(x+1)=1$, show that ( দেখাও যে ) 4

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

8. Evaluate : 2+2=4

মান নির্ণয় করো ঃ

*(a)* $\int\left(x^{3/2}+2e^x-\dfrac{1}{x}\right)dx$

*(b)* $\int \sin^3 x\cos^2 x\,dx$

***OR / অথবা***

Evaluate : 4

মান নির্ণয় করো ঃ

$$\int\frac{x+3}{\sqrt{5-4x-x^2}}dx$$

9. Find the equations of the tangent and normal to the curve $x^{2/3}+y^{2/3}=2$ at (1, 1). 2+2=4

$x^{2/3}+y^{2/3}=2$ বক্ররেখার (1, 1) বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করো।

**OR / অথবা**

Find the local maxima and local minima, if any, of the function $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$. 2+2=4

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 15$ ফলনটির স্থানীয় গরিষ্ঠ এবং লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় করো, যদি থাকে।

10. A particle moves along the curve $6y = x^3 + 2$. Find the point(s) on the curve at which the $y$-coordinate is changing 8 times as fast as the $x$-coordinate. 4

একটি কণিকা $6y = x^3 + 2$ বক্ররেখা বরাবর চলাচল করে। বক্ররেখাটির সেই বিন্দুগুলি নির্ণয় করো যেখানে $x$ - স্থানাংকের থেকে 8 গুণ বেশী বেগে $y$ - স্থানাংক পরিবর্তিত হয়।

**OR / অথবা**

Show that the function $f(x) = \cos 3x$ is neither strictly increasing nor decreasing on $(0, \pi/2)$. 4

দেখাও যে $f(x) = \cos 3x$ ফলনটি $(0, \pi/2)$ - তে যথাযথভাবে বর্দ্ধমান বা হ্রাসমান কোনোটিই নয়।

11. Evaluate $\int_0^5 (x+1)\,dx$ as the limit of a sum. 4

যোগফলের চরম মান হিসাবে $\int_0^5 (x+1)\,dx$ - এর মান নির্ণয় করো।



**OR / অথবা**

Evaluate : 4

মান নির্ণয় করো ঃ

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

12. Show that the vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ is equally inclined to the axes $OX$, $OY$ and $OZ$. 4

দেখাও যে $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি $OX$, $OY$ এবং $OZ$ অক্ষের সঙ্গে সমভাবে আনত আছে।

**OR / অথবা**

State the triangle inequality for any two vectors and prove it. 1+3=4

যে কোনো দুটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বৈষম্যটি লিখে প্রমাণ করো।

13. Probability of solving a specific problem independently by $A$ and $B$ are $\frac{1}{2}$ and $\frac{1}{3}$ respectively. If both try to solve the problem independently, find the probability that — 2+2=4

*(i)* the problem is solved

*(ii)* exactly one of them solves the problem.

$A$ এবং $B$ -এর দ্বারা একটি বিশেষ সমস্যা স্বতন্ত্রভাবে সমাধান করার সম্ভাবিতা যথাক্রমে $\frac{1}{2}$ এবং $\frac{1}{3}$। যদি সমস্যাটি সমাধানের জন্য উভয়ে স্বতন্ত্রভাবে চেষ্টা করে, তাহলে সম্ভাবিতা নির্ণয় করো যাতে —

*(i)* সমস্যাটির সমাধান হয়

*(ii)* তাদের ঠিক একজন সমস্যাটির সমাধান করে।

**OR / অথবা**

Let $X$ denote the number of hours Rita studies during a randomly selected school day. The probability that $X$ can take the values $x$, has the following form :

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.1, & \text{if} \quad x=0 \\ kx, & \text{if} \quad x=1 \text{ or } 2 \\ k(5-x), & \text{if} \quad x=3 \text{ or } 4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

where $k$ is a unknown constant.

*(a)* Find the value of $k$.

*(b)* What is the probability that Rita studies at least two hours, exactly two hours and at most two hours ? 1+1+1+1=4

যদৃচ্ছভাবে নির্বাচন করা স্কুলের দিনে কোনো একদিন রীতার অধ্যয়ন করা মোট ঘণ্টার সংখ্যাটি $X$-দ্বারা বোঝানো হলো। $X$-এর মান $x$ হওয়ার সম্ভাবিতাকে নিম্নোক্তরূপে প্রকাশ করা হয়েছে ঃ

$$P(X=x)=\begin{cases} 0.1, & \text{যদি} \quad x=0 \\ kx, & \text{যদি} \quad x=1 \text{ বা } 2 \\ k(5-x), & \text{যদি} \quad x=3 \text{ বা } 4 \\ 0, & \text{অন্যথা} \end{cases}$$

যেখানে $k$ একটি অজ্ঞাত ধ্রুবক।

*(a)* $k$ - এর মান নির্ণয় করো।

*(b)* রীতার কমপক্ষে দুই ঘণ্টা, প্রকৃতপক্ষে দুই ঘণ্টা এবং সর্বোচ্চ দুই ঘণ্টা অধ্যয়ন করার সম্ভাবিতাগুলি কত?



14. Find the minors and cofactors of the elements of the determinant 3+3=6

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মৌলগুলির অণুরাশি এবং সহরাশি নির্ণয় করো।

**OR / অথবা**

Find $A^{-1}$ by using elementary transformation, where — 6

মৌলিক রূপান্তর প্রক্রিয়া প্রয়োগ করে $A^{-1}$ নির্ণয় করো যেখানে —

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

15. Define homogeneous function of degree $n$. Solve the differential equation 1+5=6

$(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)\,dx$.

$n$ মাত্রার সমমাত্রিক ফলনের সংজ্ঞা দাও।

$(x^2+xy)\,dy = (x^2+y^2)\,dx$ অবকল সমীকরণটির সমাধান করো।

***OR / অথবা***

*(i)* Solve the differential equation : 3

অবকল সমীকরণটির সমাধান করো ঃ

$$x\frac{dy}{dx} + (2x+1)y = xe^{-2x}$$

*(ii)* Form the differential equation of the family of circles touching the $X$-axis at origin. 3

মূলবিন্দুতে $X$-অক্ষকে স্পর্শ করা বৃত্তের পরিবারটির অবকল সমীকরণটি গঠন করো।

16. Integrate :

সমাকলন করো ঃ

*(a)* $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

*(b)* $\int x\sin^{-1}x\,dx$ 2+4=6



***OR / অথবা***

*(a)* $\int\left(\frac{2\cos x - 3\sin x}{6\cos x + 4\sin x}\right)dx$

*(b)* $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-1}\,dx$ 2+4=6

17. For any three vectors $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, prove that

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$. 6

যে কোনো তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$-এর জন্য প্রমাণ করো যে

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$।

***OR / অথবা***

Three vectors $\vec{a}, \vec{b}$ and $\vec{c}$ satisfy the condition $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$. Evaluate the quantity

$\mu = \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$, if $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$ and $|\vec{c}|=2$. 6

$\vec{a}, \vec{b}$ এবং $\vec{c}$ ভেক্টর তিনটি $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$ শর্ত সিদ্ধ করে।

$\mu = \vec{a}.\vec{b} + \vec{b}.\vec{c} + \vec{c}.\vec{a}$-এর মান নির্ণয় করো যদি $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=4$ এবং $|\vec{c}|=2$ হয়।

18. Find the shortest distance between the lines

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and

$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$. 6

$\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) + \lambda(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এবং

$\vec{r} = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) + \mu(2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k})$ রেখাদুটির মধ্যে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করো।

***OR / অথবা***

Find the equation of the plane passing through the point (–1, 3, 2) and perpendicular to each of the planes $x + 2y + 3z = 5$ and $3x + 3y + z = 0$. 6

(–1, 3, 2) বিন্দুগামী এবং $x + 2y + 3z = 5$ এবং $3x + 3y + z = 0$ সমতল দুটির প্রত্যেকটির সঙ্গে লম্বভাবে অবস্থিত সমতলটির সমীকরণ নির্ণয় করো।

19. Minimize $Z = 3x + 5y$

subject to

$$x + 3y \geq 3$$
$$x + y \geq 2$$
$$x, y \geq 0$$ 6

$x + 3y \geq 3$

$x + y \geq 2$

$x, y \geq 0$ সীমাবদ্ধতা সাপেক্ষে $Z = 3x + 5y$ -এর সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো।



***OR / অথবা***

Minimise and Maximise $Z = 5x + 10y$

subject to

$$x + 2y \leq 120$$
$$x + y \geq 60$$
$$x - 2y \geq 0$$
$$x, y \geq 0$$ 6

$x + 2y \leq 120$

$x + y \geq 60$

$x - 2y \geq 0$

$x, y \geq 0$ -এর সাপেক্ষে $Z = 5x + 10y$ -এর সর্বোচ্চ এবং সর্বনিম্ন মান নির্ণয় করো।

20. Of the students in a college, it is known that 60% reside in hostel and 40% are day scholars (not residing in hostel). Previous year results report that 30% of all students who reside in hostel attain A grade and 20% of day scholars attain A grade in their annual examination. At the end of the year, one student is chosen at random from the college and he has an A grade, what is the probability that the student is a hostlier ? 6

একটি মহাবিদ্যালয়ের ছাত্রদের মধ্যে 60% ছাত্রাবাসে এবং 40% ছাত্রাবাসে থাকে না বলে জানা যায়। গত বছরের ফলাফল অনুসারে বাৎসরিক পরীক্ষায় ছাত্রাবাসে থাকা সকল ছাত্রের 30% এবং ছাত্রাবাসে না থাকা ছাত্রদের 20% A গ্রেড পেয়েছিল। বছরের শেষে মহাবিদ্যালয়টির যদৃচ্ছভাবে বাছাই করা একজন ছাত্রই A গ্রেড পায়। ছাত্রটির ছাত্রাবাসের আবাসিক হওয়ার সম্ভাবিতা কত?

***OR / অথবা***

Find the mean number of heads in three tosses of a fair coin. 6

একটি নিখুঁত মুদ্রা তিনবার টস্ করার পর প্রাপ্ত মুণ্ডু সংখ্যার মাধ্য নির্ণয় করো।

———×———